

OSNOVNE JEDNAČINE ZA RAVNE MONOHROMATSKE TALASE

1.1 MAKSVELOVE JEDNAČINE ZA RAVNE MONOHROMATSKE TALASE

Visokofrekventne pojave, kakve se često sreću u optici, karakterišu se periodima istog reda veličine ili znatno manjim od karakterističnih vremena sredine (npr. vreme relaksacije, period sopstvenih oscilacija) kao i talasnim dužinama uporedivim ili znatno manjim od njenih karakterističnih dužina (npr. srednje rastojanje između atoma, srednji slobodni put). Zbog toga, u slučaju brzo promenljivih polja nije više moguć uobičajeni prelaz sa elektrodinamike vakuuma na elektrodinamiku materijalnih sredina usrednjavanjem Maksvelovih jednačina za pravo elektromagnetno polje. Ovde se više ne mogu dobro definisati pojmovi fizički beskonačno malog elementa zapremine, kao i fizički beskonačno malog intervala vremena, te više nije moguće ni usrednjavanje po beskonačno malom elementu zapremine oko uočene tačke i po beskonačno malom intervalu vremena oko uočenog trenutka. Takođe, u visokofrekventnim poljima sva naelektrisanja ponašaju se uglavnom na isti način, zato ni podela naelektrisanja na slobodna i vezana više nije moguća. Zbog toga, kao polazna tačka moraju se uzeti Maksvelove jednačine za mikrofizička elektromagnetna polja, dobijene usrednjavanjem samo po ansamblu identičnih sistema, pri čemu se sva naelektrisanja dele na *spoljašnja* i *unutrašnja*.

Ako ipak pretpostavimo da se u prvoj aproksimaciji može govoriti o usrednjavanju po beskonačno malom elementu zapremine i po fizički beskonačno malom intervalu vremena, možemo koristiti i uobičajeni oblik Maksvelovih jednačina za materijalne sredine:

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = \rho, \quad (1.1)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0, \quad (1.2)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (1.3)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \quad (1.4)$$

gde se sa ρ i \mathbf{j} označavaju srednje vrednosti prostorne i strujne gustine ukupnih slobodnih naelektrisanja: $\rho = \rho_0 + \rho_s$, $\mathbf{j} = \mathbf{j}_0 + \mathbf{j}_s$. Vektori električne indukcije i jačine električnog polja su označeni kao: $\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$ i $\mathbf{H} = 1/\mu_0 \mathbf{B} - \mathbf{M}$. Smisao veličina \mathbf{D} i \mathbf{H} sledi iz odgovarajućih materijalnih jednačina, koje u slučaju brzopromenljivih polja imaju nešto složeniji oblik. Veličine \mathbf{P} i \mathbf{M} su jačine električne i magnetne polarizacije.

Zbog navedenog se, kao najpogodniji, u slučaju brzopromenljivih polja za rešavanje potpunog sistema jednačina elektrodinamike najčešće koristi „metod Furierovih transformacija“ (*Joseph Fourier*). Primenom ovog metoda, za ravne monohromatske talase možemo jednačine polja (kao i ostale veličine) predstaviti u vidu harmonijskih funkcija položaja i vremena:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_0(\mathbf{k}, \omega) e^{-i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})}, \quad (1.5)$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{B}_0(\mathbf{k}, \omega) e^{-i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})}, \quad (1.6)$$

odnosno, u uopštenom obliku kao:

$$\psi = \psi_0 e^{-i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})} = \psi_0 e^{-i(\omega t - k_1 x - k_2 y - k_3 z)} \quad (1.7)$$

Primena Hamiltonovog (*William Hamilton*) operatora na navedene funkcije daje:

$$\begin{aligned} \nabla \psi &= \left(\mathbf{e}_1 \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{e}_2 \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{e}_3 \frac{\partial}{\partial z} \right) \psi = \mathbf{e}_1 (ik_1 \psi) + \mathbf{e}_2 (ik_2 \psi) + \mathbf{e}_3 (ik_3 \psi) \\ &= i(k_1 \mathbf{e}_1 + k_2 \mathbf{e}_2 + k_3 \mathbf{e}_3) \psi = i\mathbf{k} \psi \end{aligned}$$

proizvod iste funkcije i faktora $i\mathbf{k}$. Odavde se vidi da je $\nabla = i\mathbf{k} = ik\mathbf{n}_0$, gde je $\mathbf{n}_0 = \mathbf{k}/k$ ($\mathbf{k} = k\mathbf{n}_0$ je odgovarajući talasni vektor). Zaključujemo da se rotor i divergencija ma koje vektorske funkcije tipa $\mathbf{A}(x, y, z)$ (talasne funkcije) mogu prikazati kao $div \mathbf{A} = \nabla \cdot \mathbf{A} = i\mathbf{k} \cdot \mathbf{A}$, odnosno $rot \mathbf{A} = \nabla \times \mathbf{A} = i\mathbf{k} \times \mathbf{A}$.

Ako se poče od uobičajenih Maksvelovih jednačina (1.1 - 1.4), koje važe za materijalne sredine, bez obzira da li su to sredine sa ili bez disperzije, i napišu se za ravne monohromatske talase frekvencije ω i talasnog vektora \mathbf{k} , a divergencije i rotori svih veličina se zamene odgovarajućim izrazima, a imajući u vidu da diferenciranje po vremenu ma koje od ovih veličina daje proizvod iste funkcije sa $-i\omega$, dobija se:

$$div \mathbf{D} = i\mathbf{k} \cdot \mathbf{D} = \rho, \quad (1.8)$$

$$div \mathbf{B} = i\mathbf{k} \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (1.9)$$

$$rot \mathbf{E} = i\mathbf{k} \times \mathbf{E} = i\omega \mathbf{B}, \quad (1.10)$$

$$rot \mathbf{H} = i\mathbf{k} \times \mathbf{H} = \mathbf{j} - i\omega \mathbf{D}. \quad (1.11)$$

Ako se iz ovih jednačina eliminišu \mathbf{D} i \mathbf{H} pomoću odgovarajućih materijalnih jednačina: $\mathbf{D} = \hat{\epsilon} \mathbf{E}$ i $\mathbf{B} = \hat{\mu} \mathbf{H}$ i ρ pomoću zakona održanja slobodnih naelektrisanja: $\partial \rho / \partial t + div \mathbf{j} = 0$, u kojima se prilagode veličine ρ i \mathbf{j} za brzopromenljiva polja u obliku ravnih monohromatskih talasa, čime se dobijaju Maksvelove jednačine za ravne monohromatske talase u obliku:

$$\mathbf{k} \cdot \left[\hat{\epsilon}(\mathbf{k}, \omega) + i \frac{\hat{\sigma}(\mathbf{k}, \omega)}{\omega} \right] \cdot \mathbf{E} = 0, \quad (1.12)$$

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (1.13)$$

$$\mathbf{k} \times \mathbf{E} = \omega \mathbf{B}, \quad (1.14)$$

$$\mathbf{k} \times \hat{\mu}^{-1}(\mathbf{k}, \omega) \mathbf{B} = -\omega \left[\hat{\varepsilon}(\mathbf{k}, \omega) + i \frac{\hat{\sigma}(\mathbf{k}, \omega)}{\omega} \right] \cdot \mathbf{E}. \quad (1.15)$$

Veličine $\hat{\varepsilon}$ i $\hat{\mu}$ predstavljaju tenzore električne i magnetne permeabilnosti, dok veličina $\hat{\sigma}$ označava tenzor specifične provodljivosti. Ove veličine su opštem slučaju kompleksne.

1.2. JEDNAČINE ZA PROSTIRANJE RAVNIH ELEKTROMAGNETNIH TALASA

Bilo kakav poremećaj elektromagnetnog polja u nekoj sredini prostire se kroz nju u vidu elektromagnetnih (EM) talasa. Da bi se izvele jednačine prostiranja ovih talasa, polazi se od potpunog sistema jednačina elektrodinamike, koji čine Maksvelove jednačine, koje u slučaju sredine koja je homogena, izotropna i bez disperzije (vakuumu slične sredine) i za elektromagnetno polje koje je slabo i lokalnog dejstva imaju oblik (1.1 - 1.4). Ovim jednačinama treba pridružiti i odgovarajuće materijalne jednačine sredine, koje u slučaju ovakvih sredine imaju oblik:

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E} \quad (1.16)$$

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H} \quad (1.17)$$

$$\mathbf{j}_s = \sigma (\mathbf{E} + \mathbf{E}^{str}) \quad (1.18)$$

Elektromagnetno polje se može odrediti i pomoću elektromagnetnih potencijala (skalarni i vektorski), koji u navedenim uslovima zadovoljavaju diferencijalne jednačine:

$$\mathbf{E} = -grad \phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \quad (1.19)$$

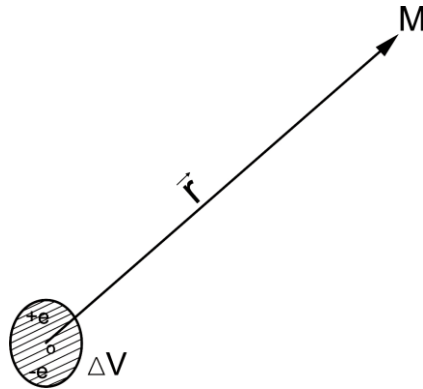
$$\mathbf{B} = rot \mathbf{A}, \quad (1.20)$$

$$\Delta \phi - \varepsilon \mu \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = -\frac{1}{\varepsilon} \rho, \quad (1.21)$$

$$\Delta \mathbf{A} - \varepsilon \mu \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mu \mathbf{j}. \quad (1.22)$$

Neka se u vrlo maloj oblasti ΔV izazove izvestan poremećaj elektromagnetnog polja i neka se prepostavi da u preostalom delu polja nema spoljašnjih naelektrisanja, ni stranog električnog polja, kao i da je srednja prostorna gustina slobodnih naelektrisanja jednaka nuli. Ove pretpostavke ne moraju da znače da je i srednja strujna gustina jednaka nuli, na primer u metalnim provodnicima u kojima ima jednak broj pozitivnih i negativnih naelektrisanja, ali se kreću samo negativna, tada će biti $\rho = \overline{\rho_s^{mik}} = 0$ i $\mathbf{j} = \overline{\mathbf{j}_s^{mik}} \neq 0$. Takođe, u samoj oblasti poremećaja može biti i $\rho \neq 0$, zbog samog poremećaja elektromagnetnog polja, usled kretanja slobodnih naelektrisanja (indeks *mik* označava

da se radi o mikrofizičkoj veličini). Primer ovoga su polovi induktora naizmenične struje sa slike 1, gde se periodično menjaju algebarske vrednosti slobodnih naelektrisanja.



Slika 1: Polovi induktora naizmenične struje

Da bi se pod navedenim uslovima ispitalo ponašanje jačine električnog i magnetnog polja van oblasti gde je izazvan poremećaj, treba zameniti $\mathbf{E}^{str} = 0$ i $\rho = 0$ u materijalnim jednačinama, čime se dobija $\mathbf{j} = \mathbf{j}_s = \sigma \mathbf{E}$, tako da sistem Maksimalovih jednačina, posle eliminacije veličina \mathbf{D} i \mathbf{H} postaje:

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = 0, \quad (1.23)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0, \quad (1.24)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (1.25)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{B} = \mu \sigma \mathbf{E} + \varepsilon \mu \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (1.26)$$

Da bi se eliminisalo \mathbf{B} treba obrazovati rotore leve i desne strane jednačine (1.25), nakon čega se dobija¹ $\operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{E} - \Delta \mathbf{E} = -\partial(\operatorname{rot} \mathbf{B}) / \partial t$. Koristeći jednačine (1.23 i 1.26) konačno se dobija:

$$\Delta \mathbf{E} - \varepsilon \mu \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} - \mu \sigma \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = 0 \quad (1.27)$$

Isti postupak se može ponoviti sa jednačinom (1.26) i eliminisati \mathbf{E} , što daje:

$$\Delta \mathbf{B} - \varepsilon \mu \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} - \mu \sigma \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0. \quad (1.28)$$

Vidi se da jačine električnog i magnetnog polja u celoj oblasti van poremećaja, gde je $\rho = 0$, zadovoljavaju diferencijalne jednačine istog oblika i ponašaju se na isti način u prostoru i vremenu.

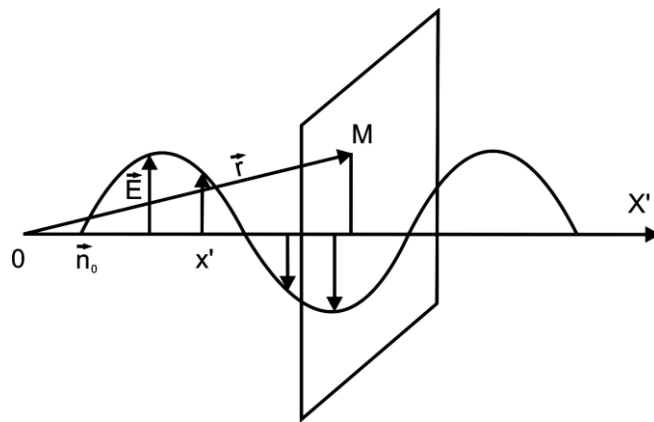
¹ $\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{A} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{A} - \Delta \mathbf{A}$

1.3. PROSTIRANJE RAVNIH TALASA U IDEALNIM DIELEKTRICIMA

U idealnim dielektricima važi $\sigma = 0$. Za ravne talase, ako se za pravac prostiranja uzme x' -osa, bilo koja komponenta ψ jačina polja zavisi samo od x' i t $\psi = \psi(x', t)$, a talasna jednačina se svodi na oblik:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x'^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0, \quad (1.29)$$

gde je uvedena oznaka $v = 1/\sqrt{\epsilon\mu}$. U ovom slučaju se sve tačke u ravni prostiranja elektromagnetnih talasa nalaze u istoj fazi oscilovanja (slika 2).



Slika 2: Prostiranje ravnih EM talasa u neprovodnoj sredini

Od posebnog interesa su ravni talasi čije se talasne funkcije harmonijski menjaju sa vremenom (tzv. mohoromatski ravni talasi). U ovom slučaju opšte rešenje talasne jednačine, na vrlo velikom rastojanju od izvora poremećaja, može se prikazati kao superpozicija:

$$\psi(x', t) = f_1\left(t - \frac{x'}{v}\right) + f_2\left(t + \frac{x'}{v}\right). \quad (1.30)$$

Jedno partikularno rešenje jednačine (1.29) je:

$$\psi = \psi_0 \sin\left[\omega\left(t - \frac{x'}{v}\right) + \phi\right] \quad (1.31)$$

pri čemu su ω i ϕ integracione konstante. Za $\phi = 0$ i $\phi = \pi/2$ biće:

$$\psi_1 = \psi_0 \sin \omega(t - x'/v), \quad (1.32)$$

$$\psi_2 = \psi_0 \cos \omega(t - x'/v). \quad (1.33)$$

Linearna kombinacija ova dva rešenja $\psi_2 \mp i\psi_1$ može se napisati kao²:

² $e^{i\alpha} = \cos \alpha + i \sin \alpha$

$$\psi = \psi_2 \mp i\psi_1 = \psi_0 \exp(\mp i\omega(t - x'/v)) \quad (1.34)$$

što takođe predstavlja partikularno rešenje iste talasne jednačine. Uzimajući $x' = \vec{r} \cdot \vec{n}_0$, gde je \vec{n}_0 jedinični vektor pravca prostiranja faze, i uvođenjem tzv. *talasnog vektora*, $\vec{k} = \omega/v\vec{n}_0$ čiji je intenzitet talasni broj $k = \omega/v = 2\pi/\lambda$, partikularno rešenje (1.34) postaje:

$$\psi = \psi_0 e^{\mp i(\omega t - kx')} = \psi_0 e^{\mp i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})}. \quad (1.35)$$

Pri tome, jedino realni i imaginarni deo ovih izraza imaju neposredni fizički smisao.

Kako funkcija ψ može biti bilo koja komponenta jačine električnog ili magnetnog polja, tako će te veličine zadovoljavati diferencijalne jednačine:

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial x'^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0, \quad (1.36)$$

$$\frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial x'^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = 0, \quad (1.37)$$

čija su dgovarajuća partikularna rešenja, koja prikazuju ravne monohromatske talase, oblika:

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{-i(\omega t - kx')}, \quad (1.38)$$

$$\vec{B} = \vec{B}_0 e^{-i(\omega t - kx')}. \quad (1.39)$$

Drugo partikularno rešenje, na primer za električno polje, razlikuje se od prvog samo sa znakom u eksponentu ispred kx' , tako opšti integral za jačinu električnog polja biće:

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{-i(\omega t - kx')} + \vec{E}_0 e^{-i(\omega t + kx')}, \quad (1.40)$$

gde prvi član predstavlja ravni monohromatski talas koji se prostire u smeru x' ose, a drugi talas koji se prostire u suprotnom smeru istom faznom brzinom $v = \omega/k$.

1.4. OSOBINE RAVNIH EM TALASA

Neka se posmatraju ma kakvi ravni elektromagnetni talasi, koji ne moraju biti monohromatski, a prostiru se u pozitivnom smeru x' -ose. Uz pretpostavku da je u posmatranoj sredini van oblasti poremećaja $\rho = 0$, jedno partikularno rešenje diferencijalne jednačine

$\vec{E} = -\text{grad}\phi - \partial\vec{A}/\partial t$ za skalarni potencijal biće $\phi = 0$. Zbog toga se Lorencov (*Hendrik Lorentz*) uslov $\text{div}\vec{A} + \epsilon\mu \frac{\partial\phi}{\partial t} = 0$ svodi na $\text{div}\vec{A} = 0$. Elektromagnetno polje ovih talasa potpuno se određuje

vektorskim potencijalom koji zadovoljava diferencijalnu jednačinu $\vec{B} = \text{rot}\vec{A}$:

$$\frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial x'^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = 0. \quad (1.41)$$

Opšti integral ove jednačine, koji odgovara prostiranju ravnih talasa u pozitivnom smeru x' -ose, biće proizvoljna funkcija argumenata $t - \frac{x'}{v}$:

$$\vec{A} = \vec{A}\left(t - \frac{x'}{v}\right) = \vec{A}(\xi). \quad (1.42)$$

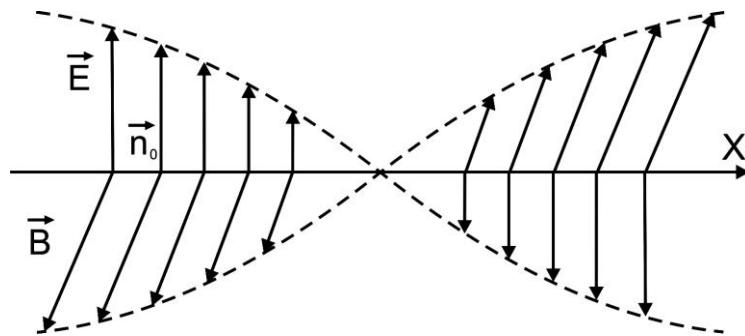
Pošto ni jedna od ovih komponenti ne zavisi od y' i z' , Lorencov uslov $\text{div} \vec{A} = 0$ postaje $\frac{\partial A'_x}{\partial x'} = 0$

i $\frac{\partial^2 A'_x}{\partial x'^2} = 0$. Zamenom u jednačinu (1.41) dobija se $0 - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = 0$, odnosno $E'_x = -\frac{\partial A'_x}{\partial t} = \text{const}$.

Ovakve konstantne komponente nemaju uticaja na elektromagnetne talase, koji su uslovljeni jedino vremenski promenljivim elektromagnetnim poljem. Zato se može uzeti da je ova konstanta jednaka nuli, jer \vec{A}_x ne zavisi ni od x' , ni od t , tj: $A_x = 0$, $E_x = 0$. Iz ovoga se zaključuje da promenljivo električno polje ravnih elektromagnetnih talasa nema komponenti u pravcu prostiranja faze, ovi talasi su uvek transverzalni. Takođe, lako se pokazuje da je za magnetno polje:

$$\vec{B} = -\frac{1}{v} \left(\vec{n}_0 \times \frac{\partial \vec{A}}{\partial \xi} \right) = \sqrt{\epsilon\mu} (\vec{n}_0 \times \vec{E}), \quad (1.43)$$

gde je $v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}}$. Pošto je $\vec{E} \perp \vec{n}_0 \Rightarrow B = \frac{1}{v} E = \sqrt{\epsilon\mu} E$. Vidi se da su vektori električnog i magnetnog polja, zajedno sa pravcem prostiranja faze ravnih elektromagnetnih talasa, u svakoj tački međusobno normalni i da obrazuju desni tetraedar (slika 3).



Slika 3: Uzajamni položaj vektora \vec{E} i \vec{B} kod ravnog EM talasa

Za određivanje energetske odnose kod ma kakvih ravnih elektromagnetnih talasa posmatraju se gustine energija električnog i magnetnog polja. Za izotropne sredine važi da je

$W_e = \frac{1}{2} \varepsilon E^2$ i $W_m = \frac{1}{2\mu} B^2$. Ove gustine se mogu povezati pomoću izraza $B = \sqrt{\varepsilon\mu}E$, i tako se

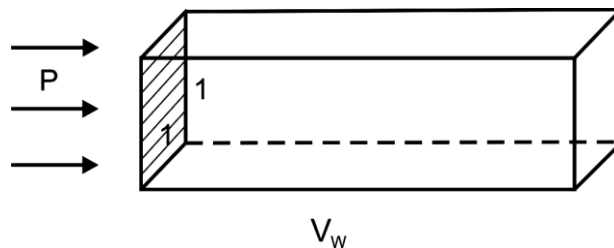
dobija da je $W_m = W_e = \frac{1}{2} \varepsilon E^2$, odnosno, gustine energija električnog i magnetnog polja ravnih elektromagnetnih talasa su međusobno jednake u svakoj tački, a ukupna gustina energije elektromagnetnog polja ovih talasa biće $W = 2W_e = \varepsilon E^2$. Odgovarajući Pojntingov (*John Poynting*) vektor biće određen pomoću jačine električnog polja:

$$\vec{P} = \vec{E} \times \vec{H} = \frac{1}{\mu} (\vec{E} \times \vec{B}) = \frac{1}{\mu} \sqrt{\varepsilon\mu} [\vec{E} \times (\vec{n}_0 \times \vec{E})] = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} [\vec{n}_0 (\vec{E} \cdot \vec{E}) - \vec{E} (\vec{E} \cdot \vec{n}_0)] \quad (44)$$

ili pošto je $\vec{E} \perp \vec{n}_0$:

$$\vec{P} = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} E^2 \vec{n}_0 \quad \text{odnosno} \quad P = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} E^2. \quad (1.45)$$

Intenzitet Pojntingovog vektora predstavlja elektromagnetnu energiju koja prostruji kroz normalno postavljenu jedinicu površine oko uočene tačke u jedinici vremena (slika 4), a njegov pravac i smer određuju pravac i smer strujanja ove enrgije na tom mestu.



Slika 4: Intenzitet Pojntingovog vektora

Na osnovu toga proizilazi da je intenzitet ovog vektora brojno jednak energiji koja se nalazi u paralelepipedu konstruisanom nad jediničnim poprečnim presekom i brzinom v_w strujanja ove enrgije ($P = W v_w$). Zamenom vrednosti ukupne gustine energije elektromagnetnog polja i

$v = 1/\sqrt{\varepsilon\mu}$ u izraz za intenzitet Pojntingovog vektora dobija se $P = \varepsilon E^2 \cdot \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}} = Wv$. Poređenjem

dva izraza za intenzitet Pojntingovog vektora vidi se da je: $v_w \stackrel{def}{=} \frac{P}{W} = v$. Dakle, energija

elektromagnetnog polja ravnih elektromagnetnih talasa struji u pravcu i smeru prostiranja faze, a brzina strujanja ove energije jednaka je brzini prostiranja faze elektromagnetnih talasa. Zato se u tom slučaju može govoriti o brzini i pravcu prostiranja elektromagnetnih talasa, što se odnosi kako na prostiranje faze, tako i na prostiranje energije. Međutim, u složenim slučajevima to više neće biti moguće.

ODBIJANJE I PRELAMANJE SVETLOSTI

2.1. ELEKTROMAGNETNA PRIRODA SVETLOSTI

Maksvelova elektromagnetna teorija svetlosti (1864) se zasniva na činjenici da se mnoge osobine svetlosnih i elektromagnetnih talasa poklapaju (brzina prostiranja u vakuumu, transverzalnost itd.). Prema ovoj teoriji, svetlost se posmatra kao specijalan slučaj elektromagnetnih talasa, kao samo jedan od spektara ovih talasa, koji se proteže od γ -zraka do radio-talasa, te se svetlost razlikuje od drugih talasa smo po frekvenciji, odnosno talasnoj dužini. Pri tome su jačine električnog i magnetnog polja \vec{E} i \vec{B} ovih talasa one veličine, koje se pri prostiranju svetlosti periodično menjaju u prostoru i vremenu, i u tom smislu ove veličine možemo zvati svetlosnim vektorima. Tada se osobine svetlosti moraju poklapati sa osobinama elektromagnetnih talasa, koje su određene opštim zakonima elektrodinamike i posebno onima koji se odnose na elektromagnetne talase.

Poseban primer je monohromatska svetlost koja, kao i svaki ravan monohromatski talas, pokazuje niz osobina karakterističnih za sva talasna kretanja, interferenciju, difrakciju i polarizaciju svetlosti. Međutim, u realnosti se češće sreće prirodna (nepolarizovana) svetlost, koja ne može biti strogo monohromatska i nastaje superpozicijom ravnih monohromatskih talasa raznih frekvencija.

Kao i ostali elektromagnetni talasi svetlost poseduje i niz drugih karakteristika, kao što su impuls i pritisak svetlosti. Pritisak svetlosti je i ekperimentalno potvrđen, čime je data dalja potvrda Maksvelove teorije, ali ovim i dalje nije bilo moguće objasniti niz optičkih pojava u atomskim razmerama (pr. fotoefekat), čime se ukazuje na granice važenja ove makrofizičke teorije. Zato je uvedena dualistička teorija svetlosti.

Pri tumačenju nekih optičkih pojava pomoću Maksvelove elektromagnetne teorije svetlosti nisu potrebne nikakve dopunske pretpostavke o atomsko-molekulskom mehanizmu pojave. To su takve pojave kod kojih atomistička struktura ne dolazi eksplicitno do izražaja, i na taj način mogu se objasniti na primer odbijanje i prelamanje svetlosti, interferencija, difrakcija, i polarizacija svetlosti, kao i optičke pojave u kristalima.

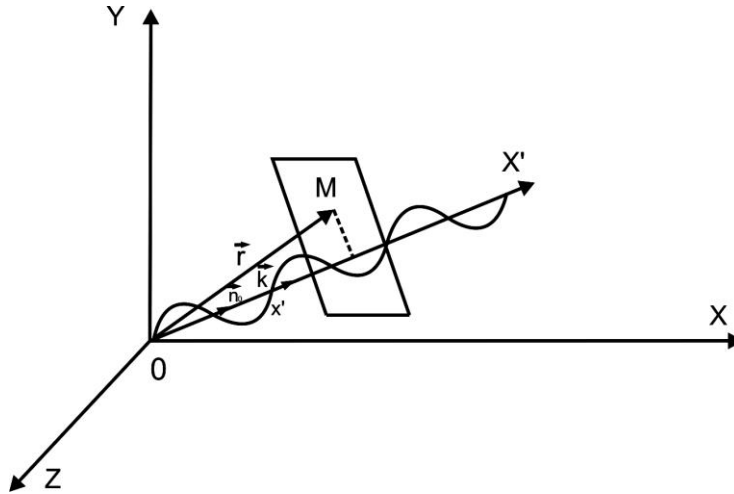
2.2. ZAKON ODBIJANJA I PRELAMANJA SVETLOSTI

Osnova svih metoda geometrijske optike su zakoni prelamanja i odbijanja svetlosti. Proučimo ove zakone na osnovu teorije elektromagnetnih talasa i u tom cilju uočimo ravan

monohromatski talas, koji se prostire u proizvoljnom pravcu određenom jediničnim vektorom \vec{n}_0 (slika 5). Neka se kao pomoćna, posmatra X' -osa u pravcu prostiranja talasa, tada je:

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{-i(\omega t - kx')} = \vec{E}_0 e^{-i(\omega t - k\vec{r} \cdot \vec{n}_0)} = \vec{E}_0 e^{-i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})} \quad (2.1)$$

Jednačina (2.1) predstavlja ravni monohromatski talas koji se prostire u pozitivnom smeru x' -ose faznom brzinom $v = \omega/k$, gde je $\vec{k} = \frac{\omega}{v} \vec{n}_0$ talasni vektor.



Slika 5: Ravan monohromatski talas koji se prostire u pravcu koji je određen vektorom \vec{n}_0

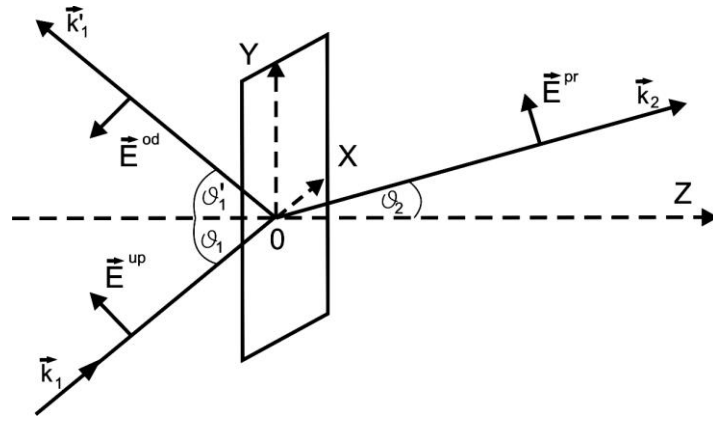
Slučaj kada takav talas padne na graničnu površ dveju sredina prikazan je na slici 6. Kao tačka upada odabran je koordinatni početak, pravac normale za z -osu, a pravac y -ose u graničnoj površi izabran je tako da pravac prostiranja upadnog talasa i normala na graničnu površ leže u yz -ravni.

Ako se sve veličine koje se odnose na upadni, odbijeni i prelomljeni talas označe indeksima 1, 1' i 2 i ako se ima u vidu da je u izabranom koordinatnom sistemu $k_{1x} = 0$, $k_{1y} = k_1 \sin \theta_1$, $k_{1z} = k_1 \cos \theta_1$, jačine električnog polja upadnog, odbijenog i prelomljenog talasa mogu se napisati u obliku:

$$\vec{E}^{up} = \vec{E}_1 e^{-i(\omega_1 t - \vec{k}_1 \cdot \vec{r})} = \vec{E}_1 e^{-i(\omega_1 t - k_1 \sin \theta_1 y - k_1 \cos \theta_1 z)}, \quad (2.2)$$

$$\vec{E}^{od} = \vec{E}'_1 e^{-i(\omega'_1 t - \vec{k}'_1 \cdot \vec{r})} = \vec{E}'_1 e^{-i(\omega'_1 t - k'_{1x} x - k'_{1y} y - k'_{1z} z)}, \quad (2.3)$$

$$\vec{E}^{pr} = \vec{E}_2 e^{-i(\omega_2 t - \vec{k}_2 \cdot \vec{r})} = \vec{E}_2 e^{-i(\omega_2 t - k_{2x} x - k_{2y} y - k_{2z} z)}. \quad (2.4)$$



Slika 6: Odbijanje i prelamanje talasa na graničnoj površi

Da bi se ispitalo ponašanje električnog i magnetnog polja ovih talasa na uočenoj graničnoj površi, primenjuju se granični uslovi elektrodinamike, koji ovde zbog odsustva površinskih naelektrisanja i struja u opštem slučaju imaju oblik:

$$\begin{aligned} B_{2n} &= B_{1n}, D_{2n} = D_{1n}, \\ \vec{H}_{2t} &= \vec{H}_{1t}, \vec{E}_{2t} = \vec{E}_{1t}, \end{aligned} \quad (2.5)$$

pri čemu se ova polja u prvoj sredini sastoje od polja upadnog i odbijenog talasa. Ako se primeni četvrti od ovih graničnih uslova na naš slučaj, tangencijalne komponente jačina električnog polja u obema sredinama na graničnoj površi $z = 0$ moraju biti međusobno jednake, odnosno:

$$\vec{E}_t^{up} + \vec{E}_t^{od} = \vec{E}_t^{pr} \text{ za } z = 0. \quad (2.6)$$

Ovaj uslov u eksplicitnom obliku glasi:

$$\vec{A}_{1t} e^{-i(\omega_1 t - k_{1y} \sin \theta_1 y)} + \vec{A}'_{1t} e^{-i(\omega_1 t - k'_{1x} x - k'_{1y} y)} = \vec{A}_{2t} e^{-i(\omega_2 t - k_{2x} x - k_{2y} y)}. \quad (2.7)$$

Da bi ova jednakost bila zadovoljena za ma koje vrednosti nezavisno promenljivih t, x i y , odgovarajući koeficijenti u eksponentima moraju biti međusobno jednaki, odnosno:

$$\omega_1 = \omega_1' = \omega_2, \quad (2.8)$$

$$k_1 \sin \theta_1 = k'_{1y} = k_{2y}, \quad (2.9)$$

$$k'_{1x} = 0 \text{ i } k_{2x} = 0. \quad (2.10)$$

Iz prve relacije se može zaključiti da se frekvencija svetlosti ne menja pri njenom odbijanju i prelamanju. Poslednja relacija pokazuje da talasni vektori \vec{k}'_1 i \vec{k}_2 odbijenog i prelomljenog talasa leže u upadnoj YZ -ravni, u kojoj leži i talasni vektor \vec{k}_1 upadnog talasa. Na osnovu toga i slike zaključuje se da je $k'_{1y} = k_1 \sin \theta_1$, $k_{2y} = k_2 \sin \theta_2$, pa ako se još pretpostavi da su sredine prozračne, proizilazi:

$$\theta_1' = \theta_1, \quad \frac{\sin \theta_1}{\sin \theta_2} = \frac{v_1}{v_2} = n_{12}. \quad (2.11)$$

Iz prve relacije i (2.10) vidi se da je pri odbijanju svetlosti upadni ugao uvek jednak odbojnom, a pravci prostiranja oba talasa i normala na graničnu površ leže u istoj ravni (zakon odbijanja svetlosti). Druga relacija zajedno sa (2.10) ukazuje da je pri prelamanju svetlosti odnos sinusa upadnog i sinusa prelomnog ugla stalan i jednak odnosu odgovarajućih brzina prostiranja svetlosti, a pravci prostiranja ova dva talasa i normala takođe leže u istoj ravni (zakon prelamanja svetlosti). Ovaj stalan odnos naziva se relativni indeks prelamanja druge sredine u odnosu na prvu i označava se sa $n_{12} = n_2 / n_1$, gde su n_1 i n_2 indeksi prelamanja sredina 1 i 2. Na taj način ova dva zakona optike proizilaze kao neposredna posledica opštih graničnih uslova elektrodinamike.

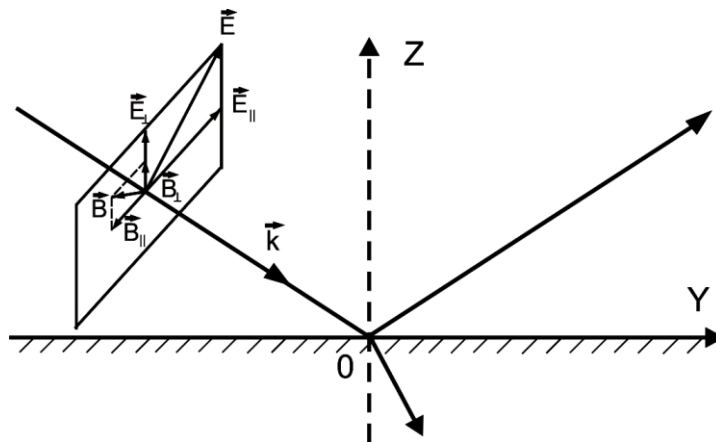
2.3. FRENELOVE FORMULE

Da bi se detaljnije ispitali uzajamni odnosi između jednačina električnog polja upadnog, odbijenog i prelomljenog ravnog svetlosnog talasa, i uz pretpostavku da je upadna svetlost monohromatska, a posmatrane sredine homogene i izotropne, tako da za ovakve talase važe materijalne jednačine u obliku: $\vec{E} = \vec{E}_0(\vec{r})e^{-i\omega t}$ i $\vec{B} = \vec{B}_0(\vec{r})e^{-i\omega t}$, tada se koristi sledeća veza između

jačina električnog i magnetnog polja: $\vec{B} = \frac{1}{\omega}(\vec{k} \times \vec{E})$ $k = \frac{\omega}{c} \sqrt{\tilde{\epsilon}_r \tilde{\mu}_r}$. Ova relacija važi

sasvim generalno, nezavisno od toga da li su posmatrane sredine prozračne ili apsorbujuće, pri tome su $\tilde{\epsilon}_r$ i $\tilde{\mu}_r$ funkcije od ω . Na slici 7 je prikazan upadni talas čije su jačine električnog i magnetnog polja podeljene na komponentu koja leži u upadnoj ravni YOZ i na komponentu koja je normalna na nju:

$$\vec{E} = \vec{E}_{\parallel} + \vec{E}_{\perp} \quad \text{i} \quad \vec{B} = \vec{B}_{\parallel} + \vec{B}_{\perp}. \quad (2.12)$$



Slika 7: Prelamanje i odbijanje EM talasa

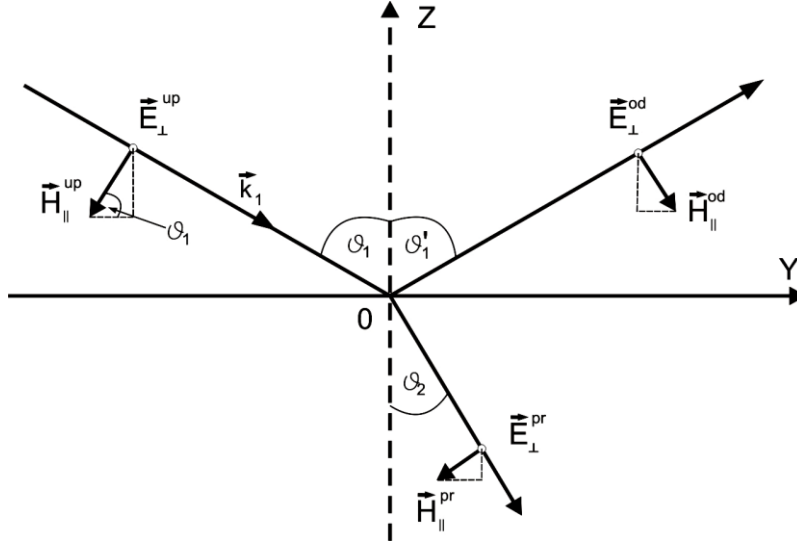
Ako se gornjim izrazom zameni \vec{E} u vezi između jačina polja sa desne strane, prvoj komponenti \vec{E}_{\parallel} , odgovaraće komponenta \vec{B} koja je normalna na upadnu ravan, a \vec{E}_{\perp} , ona koja leži u toj ravni. Na taj način, dobijaju se sledeće veze između ovih komponenti jačina polja:

$$\vec{B}_{\parallel} = \frac{1}{\omega} (\vec{k} \times \vec{E}_{\perp}), \quad B_{\parallel} = \frac{k}{\omega} E_{\perp}, \quad \vec{B}_{\perp} = \frac{1}{\omega} (\vec{k} \times \vec{E}_{\parallel}) \quad \text{i} \quad B_{\perp} = \frac{k}{\omega} E_{\parallel}. \quad (2.13)$$

Još se prepostavlja da materijalna jednačina koja povezuje veličine \vec{B} i \vec{H} , u obema sredinama približno ima oblik $\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$ (jer je $\mu_r \approx 1$). Radi lakše analize ovog problema podesnije je posmatrati dva slučaja, kada je upadni svetlosni talas linearno polarizovan normalno na upadnu ravan i kada je linearno polarizovan u samoj upadnoj ravni. U opštem slučaju, kada vetkor \vec{E} upadnog talasa ima proizvoljan pravac normalan na pravac prostiranja ovog talasa, jačina električnog polja u svakom talasu može se dobiti superpozicijom nađenih rešenja za ova dva slučaja.

2.3.1 ELEKTRIČNO POLJE NORMALNO NA UPADNU RAVAN

U ovom slučaju će postojati samo komponente \vec{E}_\perp i \vec{B}_\parallel (odnosno \vec{H}_\parallel) u upadnom, odbijenom i prelomljenom talasu. Ovakva situacija prikazana je na slici 8.



Slika 8: Električno polje normalno na upadnu ravan. Kružićima je naznačeno da su komponente \vec{E}_\perp usmerene ka čitaocu

Pošto u tom slučaju nema vektora \vec{E} i \vec{D} normalnih na graničnu površ, granični uslov $B_{2n} = B_{1n}$ daje samo identičnost, a od ostalih najpogodniji su $\vec{E}_{2t} = \vec{E}_{1t}$ i $\vec{H}_{2t} = \vec{H}_{1t}$, tj. jednakosti tangencijalnih komponenti vektora \vec{E} i \vec{H} na graničnoj površi.

Tangencijalne komponente jačine električnog polja u pravcu x -ose poklapaju se sa odgovarajućim normalnim komponentama ovih veličina u odnosu na upadnu ravan. U prvoj sredini ova tangencijalna komponenta je $E_\perp^{up} + E_\perp^{od}$, a u drugoj E_\perp^{pr} , tako da jednakost ovih komponenti na graničnoj površini daje:

$$E_\perp^{up} + E_\perp^{od} = E_\perp^{pr}. \quad (2.14)$$

Tangencijalne komponente vektora \vec{H} u pravcu y -ose u prvoj sredini, prema slici 8, ima oblik $H_\parallel^{od} \cos \mathcal{G}'_1 - H_\parallel^{up} \cos \mathcal{G}_1$, a u drugoj $-H_\parallel^{pr} \cos \mathcal{G}_2$. Jednake su na graničnoj površini, iz toga je $H_\parallel^{od} \cos \mathcal{G}'_1 - H_\parallel^{up} \cos \mathcal{G}_1 = -H_\parallel^{pr} \cos \mathcal{G}_2$. S obzirom na zakon odbijanja ($\mathcal{G}'_1 = \mathcal{G}_1$) sledi:

$$\cos \mathcal{G}_1 (H_\parallel^{up} - H_\parallel^{od}) = \cos \mathcal{G}_2 H_\parallel^{pr}. \quad (2.15)$$

Svaka od ovih komponenti vektora \vec{H} se može izraziti pomoću odgovarajuće komponente vektora

\vec{E} : $H_\parallel = \frac{1}{\mu_0} B_\parallel = \frac{1}{\mu_0} \frac{k}{\omega} E_\parallel$. Zamenom u jednačinu (2.15) dobija se:

$$\cos \vartheta_1 \left(\frac{k_1}{\mu_0 \omega} E_{\perp}^{up} - \frac{k_1}{\mu_0 \omega} E_{\perp}^{od} \right) = \cos \vartheta_2 \frac{k_2}{\mu_0 \omega} E_{\perp}^{pr},$$

odnosno

$$k_1 \cos \vartheta_1 (E_{\perp}^{up} - E_{\perp}^{od}) = k_2 \cos \vartheta_2 E_{\perp}^{pr}. \quad (2.16)$$

Sada se mogu naći odnosi $\frac{E_{\perp}^{od}}{E_{\perp}^{up}}$ i $\frac{E_{\perp}^{pr}}{E_{\perp}^{up}}$:

$$\frac{E_{\perp}^{od}}{E_{\perp}^{up}} - \frac{E_{\perp}^{pr}}{E_{\perp}^{up}} = -1, \quad k_1 \cos \vartheta_1 \frac{E_{\perp}^{od}}{E_{\perp}^{up}} + k_2 \cos \vartheta_2 \frac{E_{\perp}^{pr}}{E_{\perp}^{up}} = k_1 \cos \vartheta_1.$$

Rešenja ovih jednačina su:

$$\frac{E_{\perp}^{od}}{E_{\perp}^{up}} = \frac{k_1 \cos \vartheta_1 - k_2 \cos \vartheta_2}{k_1 \cos \vartheta_1 + k_2 \cos \vartheta_2}, \quad (2.17)$$

$$\frac{E_{\perp}^{pr}}{E_{\perp}^{up}} = \frac{2k_1 \cos \vartheta_1}{k_1 \cos \vartheta_1 + k_2 \cos \vartheta_2}.$$

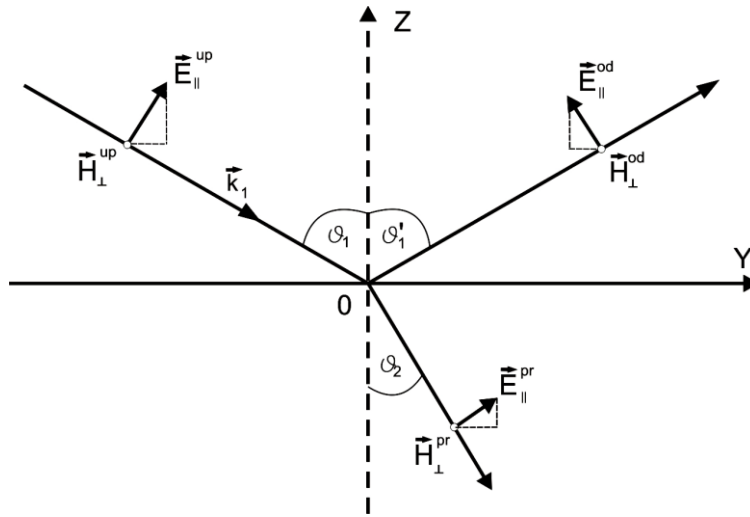
Ona se mogu iskazati i pomoću odgovarajućih relativnih dielektričnih permeabilnosti sredina $\tilde{\epsilon}_{1r}(\omega)$ i $\tilde{\epsilon}_{2r}(\omega)$, koje su u opštem slučaju kompleksne veličine i eksplicitno zavise od ω :

$$\frac{E_{\perp}^{od}}{E_{\perp}^{up}} = \frac{\sqrt{\tilde{\epsilon}_{1r}} \cos \vartheta_1 - \sqrt{\tilde{\epsilon}_{2r}} \cos \vartheta_2}{\sqrt{\tilde{\epsilon}_{1r}} \cos \vartheta_1 + \sqrt{\tilde{\epsilon}_{2r}} \cos \vartheta_2}, \quad (2.18)$$

$$\frac{E_{\perp}^{pr}}{E_{\perp}^{up}} = \frac{2\sqrt{\tilde{\epsilon}_{1r}} \cos \vartheta_1}{\sqrt{\tilde{\epsilon}_{1r}} \cos \vartheta_1 + \sqrt{\tilde{\epsilon}_{2r}} \cos \vartheta_2}.$$

2.3.2 ELEKTRIČNO POLJE U UPADNOJ RAVNI

Ako električno polje upadnog talasa leži u upadnoj ravni, biće komplementarne komponente \vec{E}_{\parallel} i \vec{B}_{\perp} , odnosno \vec{H}_{\perp} , u odnosu na prethodni slučaj (slika 9).



Slika 9: Električno polje leži u upadnoj ravni. Kružićima je naznačeno da su komponente \vec{H}_\perp usmerene ka čitaocu

I ovde se mogu primeniti isti granični uslovi kao u prethodnom slučaju, a to su jednakosti tangencijalnih komponenti vektora \vec{E} i \vec{H} na graničnoj površini. Tangencijalna komponenta vektora \vec{H} u pravcu x -ose u prvoj sredini je $H_\perp^{up} + H_\perp^{od}$, a u drugoj H_\perp^{pr} i one na graničnoj površini moraju biti jednake:

$$H_\perp^{up} + H_\perp^{od} = H_\perp^{pr}. \quad (2.19)$$

Ma koja od ovih komponenti može se svesti na odgovarajuću komponentu vektora \vec{E} :

$$H_\perp = \frac{1}{\mu_0} B_\perp = \frac{1}{\mu_0} k E_\parallel.$$

Uvođenjem u prethodnu relaciju, i skraćivanjem faktora $\frac{1}{\mu_0 \omega}$ dobija se:

$$k_1 (E_\parallel^{up} + E_\parallel^{od}) = k_2 E_\parallel^{pr}. \quad (2.20)$$

Tangencijalne komponente vektora \vec{E} u pravcu y -ose, u prvoj sredini će biti oblika $E_\parallel^{up} \cos \vartheta_1 - E_\parallel^{od} \cos \vartheta_1'$, a u drugoj $E_\parallel^{pr} \cos \vartheta_2$. Njihova jednakost na graničnoj površini daje:

$$E_\parallel^{up} \cos \vartheta_1 - E_\parallel^{od} \cos \vartheta_1' = E_\parallel^{pr} \cos \vartheta_2.$$

Na osnovu zakona odbijanja $\vartheta_1 = \vartheta_1'$:

$$\cos \vartheta_1 (E_\parallel^{up} - E_\parallel^{od}) = \cos \vartheta_2 E_\parallel^{pr}. \quad (2.21)$$

Iz ovih relacija mogu se naći nepoznati odnosi $\frac{E_\parallel^{od}}{E_\parallel^{up}}$ i $\frac{E_\parallel^{pr}}{E_\parallel^{up}}$:

$$\frac{E_{\parallel}^{od}}{E_{\parallel}^{up}} = \frac{k_2 \cos \vartheta_1 - k_1 \cos \vartheta_2}{k_2 \cos \vartheta_1 + k_1 \cos \vartheta_2},$$

$$\frac{E_{\parallel}^{pr}}{E_{\parallel}^{up}} = \frac{2k_1 \cos \vartheta_1}{k_2 \cos \vartheta_1 + k_1 \cos \vartheta_2}.$$
(2.22)

Ovo se može pokazati u funkciji odgovarajućih relativnih dielektričnih permeabilnosti sredina:

$$\frac{E_{\parallel}^{od}}{E_{\parallel}^{up}} = \frac{\sqrt{\tilde{\epsilon}_{2r}} \cos \vartheta_1 - \sqrt{\tilde{\epsilon}_{1r}} \cos \vartheta_2}{\sqrt{\tilde{\epsilon}_{2r}} \cos \vartheta_1 + \sqrt{\tilde{\epsilon}_{1r}} \cos \vartheta_2},$$

$$\frac{E_{\parallel}^{pr}}{E_{\parallel}^{up}} = \frac{2\sqrt{\tilde{\epsilon}_{1r}} \cos \vartheta_1}{\sqrt{\tilde{\epsilon}_{2r}} \cos \vartheta_1 + \sqrt{\tilde{\epsilon}_{1r}} \cos \vartheta_2}.$$
(2.23)

Navedene formule određuju relativne vrednosti paralelnih i normalnih komponenti jačina električnog polja odbijenog i prelomljenog talasa u odnosu na vrednost odgovarajuće komponente jačine polja upadnog talasa i nazivaju se Frenelove formule.

2.3.3. SLUČAJVI PROZRAČNE I NEPROZRAČNE SREDINE

Ako su obe posmatrane sredine prozračne i neprovodne, odnosno ako su im imaginarni delovi $\tilde{\epsilon}(\omega)$ i $\tilde{\mu}(\omega)$ zanemarljivi u odnosu na njihove realne delove, pomoću zakona prelamanja svetlosti možemo Frenelove formule transformisati u jednostavniji oblik, na osnovu toga što je veličina $\sqrt{\tilde{\epsilon}_r(\omega)\tilde{\mu}_r(\omega)}$ tada realna i predstavlja indeks prelamanja sredine:

$$n = \sqrt{\tilde{\epsilon}_r(\omega)\tilde{\mu}_r(\omega)} \approx \sqrt{\tilde{\epsilon}_r(\omega)}.$$
(2.24)

U tom slučaju se relativni indeks prelamanja, definisan kao odnos faznih brzina $\frac{v_1}{v_2}$, može prikazati

kao:

$$n_{12} = \frac{v_1}{v_2} = \frac{\frac{c}{\sqrt{\tilde{\epsilon}_{1r}(\omega)\tilde{\mu}_{1r}(\omega)}}}{\frac{c}{\sqrt{\tilde{\epsilon}_{2r}(\omega)\tilde{\mu}_{2r}(\omega)}}} = \frac{\sqrt{\tilde{\epsilon}_{2r}(\omega)}}{\sqrt{\tilde{\epsilon}_{1r}(\omega)}} = \frac{n_2}{n_1}.$$

Onda će zakon prelamanja svetlosti biti:

$$\frac{\sin \vartheta_1}{\sin \vartheta_2} = \frac{\sqrt{\tilde{\epsilon}_{2r}(\omega)}}{\sqrt{\tilde{\epsilon}_{1r}(\omega)}} = \frac{n_2}{n_1}.$$
(2.25)

Sada se u Frenelovim formulama veličine $\sqrt{\tilde{\epsilon}_{jr}(\omega)}$ ($j=1,2$) mogu zameniti sa n_j , na taj način uvodeći indekse prelamanja obe sredine:

$$\frac{E_{\perp}^{od}}{E_{\perp}^{up}} = \frac{n_1 \cos \vartheta_1 - n_2 \cos \vartheta_2}{n_1 \cos \vartheta_1 + n_2 \cos \vartheta_2}, \quad \frac{E_{\perp}^{pr}}{E_{\perp}^{up}} = \frac{2 n_1 \cos \vartheta_1}{n_1 \cos \vartheta_1 + n_2 \cos \vartheta_2}. \quad (2.26)$$

Koristeći zakon prelamanja, mogu se eliminisati i indeksi prelamanja, čime će se eliminisati i karakteristike sredina, tako da ostaju samo upadni i prelomljeni ugao:

$$\frac{E_{\perp}^{od}}{E_{\perp}^{up}} = \frac{\cos \vartheta_1 - \frac{n_2}{n_1} \cos \vartheta_2}{\cos \vartheta_1 + \frac{n_2}{n_1} \cos \vartheta_2} = \frac{\cos \vartheta_1 - \frac{\sin \vartheta_1}{\sin \vartheta_2} \cos \vartheta_2}{\cos \vartheta_1 + \frac{\sin \vartheta_1}{\sin \vartheta_2} \cos \vartheta_2} = \frac{\sin(\vartheta_2 - \vartheta_1)}{\sin(\vartheta_2 + \vartheta_1)}.$$

Sličnim postupkom dobija se:

$$\frac{E_{\perp}^{od}}{E_{\perp}^{up}} = -\frac{\sin(\vartheta_1 - \vartheta_2)}{\sin(\vartheta_1 + \vartheta_2)} \quad \frac{E_{\perp}^{pr}}{E_{\perp}^{up}} = \frac{2 \cos \vartheta_1 \sin \vartheta_2}{\sin(\vartheta_1 + \vartheta_2)}, \quad (2.27)$$

$$\frac{E_{\parallel}^{od}}{E_{\parallel}^{up}} = \frac{\operatorname{tg}(\vartheta_1 - \vartheta_2)}{\operatorname{tg}(\vartheta_1 + \vartheta_2)} \quad \frac{E_{\parallel}^{pr}}{E_{\parallel}^{up}} = \frac{2 \cos \vartheta_1 \sin \vartheta_2}{\sin(\vartheta_1 + \vartheta_2) \cos(\vartheta_1 - \vartheta_2)}. \quad (2.28)$$

Ako su ipak posmatrane sredine *neprozračne* (apsorbujuće), odnosi komponenata jačina električnog polja koje određuju Frenelove formule ne predstavljaju više realne veličine. U tom slučaju veličina $\sqrt{\tilde{\epsilon}_r(\omega) \tilde{\mu}_r(\omega)}$ je kompleksna i može se napisati u obliku:

$$n + ik = \sqrt{\tilde{\epsilon}_r(\omega) \tilde{\mu}_r(\omega)}. \quad (2.29)$$

Time su definisani indeksi prelamanja n i koeficijent apsorpcije k za takve sredine. Tada se u Frenelovim formulama veličine $\sqrt{\tilde{\epsilon}_{jr}(\omega)}$ ($j=1,2$) moraju zameniti izrazima ovog tipa. Time se dobijaju formule koje bi se od prethodnih razlikovale samo po tome što bi u njima umesto n_j ($j=1,2$) figurisali izrazi $n_j + ik_j$. Međutim, zbog kompleksnosti ovih odnosa, od većeg interesa su njihove apsolutne vrednosti, koje određuju odnose odgovarajućih gustina energija elektromagnetnog polja.

2.4. KOEFICIJENTI REFLEKSIJE I TRANSMISIJE

Pošto se pri odbijanju i prelamanju svetlosti sa talasima prenosi i energija njihovog elektromagnetnog polja, važno je odrediti koliko se od upadne energije odbije na graničnoj površini, a koliko propusti u drugu sredinu. Zato se uvode dva bezdimenziona koeficijenta, koji daju informacije o tome.

KOEFICIJENT REFLEKSIJE se definiše kao odnos srednjih vremenskih vrednosti fluksa odbijene energije i fluksa upadne energije u pravcu normale na graničnu površ. Imajući u vidu da intenzitet Pojntingovog vektora predstavlja energiju koja prostruji kroz normalno postavljenu jedinicu površine u jedinici vremena, koeficijent refleksije biće jednak odnosu srednjih vremenskih vrednosti z -komponenti Pojntingovog vektora u odbijenom i upadnom talasu:

$$R = \frac{\overline{P}_z^{od}}{\overline{P}_z^{up}} = \frac{\overline{P}^{od} \cdot \cos \vartheta_1'}{\overline{P}^{up} \cdot \cos \vartheta_1}. \quad (2.30)$$

Ova srednja vremenska vrednost Pojntingovog vektora ravnog monohromatskog talasa u disperzionoj sredini data je izrazom:

$$\overline{P} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\tilde{\varepsilon}(\omega)}{\tilde{\mu}(\omega)}} |\vec{E}|^2. \quad (2.31)$$

Imajući u vidu da su odbijeni i upadni talas u istoj sredini, a prema zakonu odbijanja svetlosti je $\vartheta_1 = \vartheta_1'$, onda je koeficijent refleksije jednak odnosu kvadrata intenziteta jačina električnog polja u odbijenom i upadnom talasu:

$$R = \frac{\overline{P}^{od}}{\overline{P}^{up}} = \frac{|\vec{E}^{od}|^2}{|\vec{E}^{up}|^2}. \quad (2.32)$$

KOEFICIJEN TRANSMISIJE se definiše kao odnos srednjih vremenskih vrednosti fluksa propuštene enrgije i fluksa upadne energije u pravcu normale na površ:

$$T = \frac{\overline{P}_z^{pr}}{\overline{P}_z^{up}} = \frac{\overline{P}^{pr} \cdot \cos \vartheta_2}{\overline{P}^{up} \cdot \cos \vartheta_1}. \quad (2.33)$$

Onda će za upadni i prelomljeni talas biti:

$$\begin{aligned}\bar{P}_z^{up} &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\tilde{\epsilon}_1(\omega)}{\mu_0}} |\vec{E}^{up}|^2 \cos \vartheta_1, \\ \bar{P}_z^{pr} &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\tilde{\epsilon}_2(\omega)}{\mu_0}} |\vec{E}^{pr}|^2 \cos \vartheta_2.\end{aligned}\tag{2.34}$$

Tada se koeficijent transmisije može napisati u obliku:

$$T = \frac{\bar{P}^{pr} \cdot \cos \vartheta_2}{\bar{P}^{up} \cdot \cos \vartheta_1} = \frac{\sqrt{\tilde{\epsilon}_{2r}} |\vec{E}^{pr}|^2 \cos \vartheta_2}{\sqrt{\tilde{\epsilon}_{1r}} |\vec{E}^{up}|^2 \cos \vartheta_1}.\tag{2.35}$$

Pošto se fluks energije upadne svetlosti na graničnoj površini razlaže na fluksove energija odbijene i prelomljene svetlosti, onda važi:

$$|\bar{P}_z^{od}| + |\bar{P}_z^{pr}| = |\bar{P}_z^{up}|.$$

Deljenjem obe strane sa $|\bar{P}_z^{up}|$, proizilazi da je zbir koeficijenata refleksije i transmisije jednak jedinici ($R + T = 1$).

Ako se ove relacije primene na svetlost polarizovanu normalno na upadnu ravan, jednačine električnog polja u svakom talasu imaće samo komponente \vec{E}_\perp :

$$R_\perp = \frac{|\vec{E}_\perp^{od}|^2}{|\vec{E}_\perp^{up}|^2} = \left| \frac{\sqrt{\tilde{\epsilon}_{1r}} \cos \vartheta_1 - \sqrt{\tilde{\epsilon}_{2r}} \cos \vartheta_2}{\sqrt{\tilde{\epsilon}_{1r}} \cos \vartheta_1 + \sqrt{\tilde{\epsilon}_{2r}} \cos \vartheta_2} \right|^2.\tag{2.36}$$

Ako se primene na svetlost polarizovanu u samoj upadnoj ravni, jačine električnog polja u svakom talasu imaće samo komponente \vec{E}_\parallel :

$$R_\parallel = \frac{|\vec{E}_\parallel^{od}|^2}{|\vec{E}_\parallel^{up}|^2} = \left| \frac{\sqrt{\tilde{\epsilon}_{2r}} \cos \vartheta_1 - \sqrt{\tilde{\epsilon}_{1r}} \cos \vartheta_2}{\sqrt{\tilde{\epsilon}_{2r}} \cos \vartheta_1 + \sqrt{\tilde{\epsilon}_{1r}} \cos \vartheta_2} \right|^2.\tag{2.37}$$

Ove dve jednačine važe sasvim generalno, nezavisno od toga da li su posmatrane sredine prozirane ili ne. Ako svetlost pada normalno na graničnu površ, kad su i upadni i prelomni ugao jednaki nuli, oba koeficijenta se poklapaju:

$$(R_\perp)_{\vartheta_1=0} = (R_\parallel)_{\vartheta_1=0} = \left| \frac{\sqrt{\tilde{\epsilon}_{1r}} - \sqrt{\tilde{\epsilon}_{2r}}}{\sqrt{\tilde{\epsilon}_{1r}} + \sqrt{\tilde{\epsilon}_{2r}}} \right|^2.\tag{2.38}$$

Vidi se da su pri normalnom upadu polarizovane svetlosti na graničnu površ obe komponente \vec{E}_\perp i \vec{E}_\parallel jačine električnog polja jednako oslabljene u odbijenom i prelomljenom talasu, tj. isti deo svetlosti se odbija odnosno propušta, bez obzira da li je ova svetlost polarizovana normalno na upadnu ravan ili u samoj upadnoj ravni.

Sve dosada navedene formule su opšteg karaktera, pri čemu su kod prozračnih sredina veličine $\sqrt{\tilde{\epsilon}_{jr}}$ realne i predstavljaju indekse prelamanja n_j , dok su kod neprozračnih sredina ove veličine kompleksne i jednake $n_j + ik_j$, tj. njihov imaginarni deo je koeficijent apsorpcije sredine.

Ako se posmatranje ograniči na slučaj kada svetlost pada normalno na graničnu površ i ako su obe posmatrane sredine prozračne i neprovodne, koeficijent refleksije ima sledeći oblik:

$$(R_{\perp})_{\vartheta_1=0} = (R_{\parallel})_{\vartheta_1=0} = \left(\frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} \right)^2 = \left(\frac{1 - n_{12}}{1 + n_{12}} \right)^2. \quad (2.39)$$

Ako je ipak jedna od sredina neprozračna (apsorbujuća), na primer druga, tj. ako svetlost normalno pada iz prozračne na neprozračnu sredinu, biće: $\sqrt{\tilde{\epsilon}_{1r}} = n_1$, $\sqrt{\tilde{\epsilon}_{2r}} = n_2 + ik_2$. Onda je koeficijent refleksije u ovom slučaju:

$$(R_{\perp})_{\vartheta_1=0} = (R_{\parallel})_{\vartheta_1=0} = \left| \frac{n_1 - (n_2 + ik_2)}{n_1 + (n_2 + ik_2)} \right|^2.$$

Pošto je apsolutna vrednost količnika dva kompleksna broja jednaka količniku njihovih apsolutnih vrednosti, biće:

$$\left| \frac{n_1 - (n_2 + ik_2)}{n_1 + (n_2 + ik_2)} \right| = \left| \frac{n_1 - n_2 - ik_2}{n_1 + n_2 + ik_2} \right| = \frac{\sqrt{(n_1 - n_2)^2 + k_2^2}}{\sqrt{(n_1 + n_2)^2 + k_2^2}}.$$

Tada se prethodni izraz svodi na sledeći oblik:

$$(R_{\perp})_{\vartheta_1=0} = (R_{\parallel})_{\vartheta_1=0} = \frac{(n_1 - n_2)^2 + k_2^2}{(n_1 + n_2)^2 + k_2^2}. \quad (2.40)$$

I u graničnom slučaju kada $k_2 \rightarrow 0$, izraz prelazi u onaj za prethodni slučaj, a ako je $k_2 \gg n_j$ on teži jedinici, bez obzira na vrednost koeficijenta apsorpcije k_2 .

Postoji još jedan slučaj, kada je svetlost polarizovana u proizvoljnom pravcu, tako da ravan polarizacije sa upadnom ravni gradi ugao α . Tada je $E_{\parallel} = E \cos \alpha$, $E_{\perp} = E \sin \alpha$, gde je E intenzitet amplitude upadnog talasa.

U tom slučaju je energija odbijenog talasa srazmerna zbiru kvadrata intenziteta jačine polja E_{\perp}^{od} i E_{\parallel}^{od} , odnosno oblika:

$$W - R_{\perp} E_{\perp}^2 + R_{\parallel} E_{\parallel}^2 = E^2 (R_{\perp} \sin^2 \alpha + R_{\parallel} \cos^2 \alpha).$$

Koeficijent refleksije će biti:

$$R_{\alpha} = R_{\perp} \sin^2 \alpha + R_{\parallel} \cos^2 \alpha.$$

Ukoliko se posmatra prirodna nepolarizovana svetlost, koeficijen refleksije dobiće se usrednjavanjem prethodnog izraza po svim vrednostima ugla α : $R = R_{\perp} \overline{\sin^2 \alpha} + R_{\parallel} \overline{\cos^2 \alpha}$. Pošto su u ovom slučaju svi pravci vektora \vec{E} (kao i \vec{B}) podjednako verovatni, biće:

$$R = \frac{1}{2}(R_{\perp} + R_{\parallel}). \quad (2.41)$$

Prema tome, kod prirodne svetlosti isti doprinos energiji odbijenog talasa daju komponente \vec{E}_{\perp} i \vec{E}_{\parallel} jačine električnog polja koje leže normalno na upadnu ravan odnosno u samoj upadnoj ravni, i to nezavisno od upadnog ugla. Sa druge strane, keficijent transmisije se može izračunati u svim ovim slučajevima po svojoj definiciji, koja važi za prozračne i neprozračne sredine. Međutim, to nije neophodno, jer kada je određen koeficijent refleksije, lako se može odrediti koeficijent transmisije preko veze $T = 1 - R$.

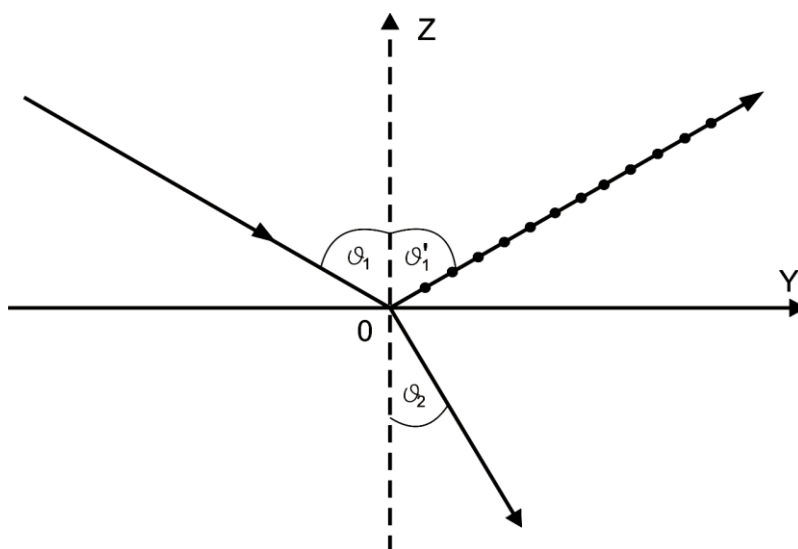
2.5. POSLEDICE FRENELOVIIH FORMULA

Postavlja se pitanje da li se u izotropnoj prozračnoj sredini neka od komponenti jačine električnog polja ugasi usled odbijanja i prelamanja svetlosti. Na osnovu Frenelovih formula:

$$\frac{E_{\perp}^{od}}{E_{\perp}^{up}} = -\frac{\sin(\vartheta_1 - \vartheta_2)}{\sin(\vartheta_1 + \vartheta_2)} \quad \frac{E_{\perp}^{pr}}{E_{\perp}^{up}} = \frac{2 \cos \vartheta_1 \sin \vartheta_2}{\sin(\vartheta_1 + \vartheta_2)},$$

$$\frac{E_{\parallel}^{od}}{E_{\parallel}^{up}} = \frac{\operatorname{tg}(\vartheta_1 - \vartheta_2)}{\operatorname{tg}(\vartheta_1 + \vartheta_2)} \quad \frac{E_{\parallel}^{pr}}{E_{\parallel}^{up}} = \frac{2 \cos \vartheta_1 \sin \vartheta_2}{\sin(\vartheta_1 + \vartheta_2) \cos(\vartheta_1 - \vartheta_2)}.$$

može se zaključiti da se normalna komponenta nikada ne može ugasi. Međutim, paralelna komponenta u odbijenom talasu gasi se kada je $\operatorname{tg}(\vartheta_1 + \vartheta_2) = \pm\infty$, odnosno, kada je $\vartheta_1 + \vartheta_2 = \frac{\pi}{2}$. U tom slučaju, vektor električnog polja osciluje samo u jednom pravcu, normalno na upadnu ravan, te je odbijena svetlost linearno polarizovana, a pošto je $\vartheta_1' = \vartheta_1$, onda se prema $\vartheta_1 + \vartheta_2 = \frac{\pi}{2}$; vidi da su pravci prostiranja odbijenog i prelomljenog talasa međusobno normalni (slika 10).



Slika 10: Prelamanje pod Brusterovim uglom

Indeks prelamanja se svodi na:

$$n_{12} = \frac{\sin \vartheta_1}{\sin \vartheta_2} = \frac{\sin \vartheta_1}{\sin \left(\frac{\pi}{2} - \vartheta_1 \right)} = \operatorname{tg} \vartheta_1,$$

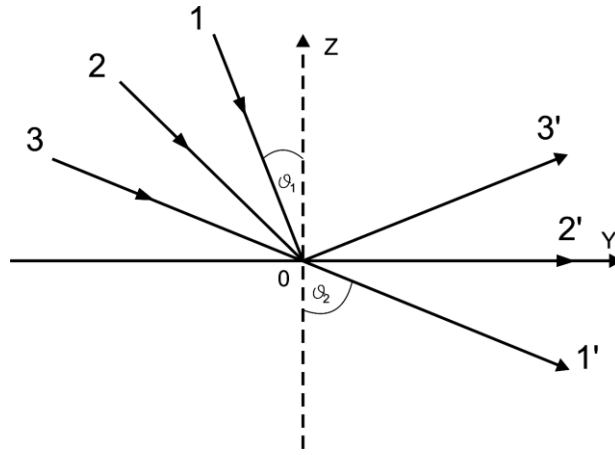
$$\operatorname{tg} \vartheta_1 = n_{12}. \quad (2.42)$$

Prema tome, ako prirodna svetlost padne na graničnu površ pod uglom čiji je tangens jednak indeksu prelamanja druge sredine u odnosu na prvu, u odbijenom talasu preostaje samo normalna komponenta, te je odbijena svetlost linearno polarizovana, normalno na upadnu ravan. Ovaj zakon se naziva Brusterov (David Brewster) zakon i pokazuje da se u izotropnoj sredini polarizovana svetlost može dobiti odbijanjem prirodne svetlosti pod navedenim uslovom.

Ako je $n_{12} < 1$, odnosno ako je $n_2 < n_1$, pri prelasku svetlosti iz prve sredine u drugu, počev od izvesne vrednosti upadnog ugla ϑ_1 takve da je $\sin \vartheta_1 = n_{12}$, prema zakonu prelamanja biće:

$$\sin \vartheta_2 = \frac{1}{n_{12}} \sin \vartheta_1 > 1. \quad (2.43)$$

Tada je ugao ϑ_2 imaginaran. Onda se ne javlja prelomljeni, već samo odbijeni talas kao na slici 11.



Slika 11: Totalna refleksija svetlosti

Zato se ova pojava naziva totalna refleksija svetlosti. Frenelove formule važe i u ovom slučaju.

Neka je:

$$\sin \vartheta_2 = n > 1, \quad (2.44)$$

$$\cos \vartheta_2 = \pm \sqrt{1 - \sin^2 \vartheta_2} = \pm i \sqrt{a^2 - 1}. \quad (2.45)$$

i neka se Frenelove formule napišu u obliku:

$$\frac{E_{\perp}^{od}}{E_{\perp}^{up}} = \frac{\sin \vartheta_2 \cos \vartheta_1 - \sin \vartheta_1 \cos \vartheta_2}{\sin \vartheta_2 \cos \vartheta_1 + \sin \vartheta_1 \cos \vartheta_2}, \quad \frac{E_{\parallel}^{od}}{E_{\parallel}^{up}} = \frac{\sin \vartheta_1 \cos \vartheta_1 - \sin \vartheta_2 \cos \vartheta_2}{\sin \vartheta_1 \cos \vartheta_1 + \sin \vartheta_2 \cos \vartheta_2}. \quad (2.46)$$

posle zamene $\sin \vartheta_2$ i $\cos \vartheta_2$ u ovim izrazima dobiće se:

$$\frac{E_{\perp}^{od}}{E_{\perp}^{up}} = \frac{a \cos \vartheta_1 \mp i \sqrt{a^2 - 1} \sin \vartheta_1}{a \cos \vartheta_1 \pm i \sqrt{a^2 - 1} \sin \vartheta_1}, \quad \frac{E_{\parallel}^{od}}{E_{\parallel}^{up}} = \frac{\sin \vartheta_1 \cos \vartheta_1 \mp i a \sqrt{a^2 - 1}}{\sin \vartheta_1 \cos \vartheta_1 \pm i a \sqrt{a^2 - 1}}. \quad (2.47)$$

U oba ova izraza brojilac i imenilac su uzajamno konjugovano kompleksni, oblika $x \mp iy$, a pošto je apsolutna vrednost takvog izraza:

$$\left| \frac{x \mp iy}{x \pm iy} \right| = \frac{|x \mp iy|}{|x \pm iy|} = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 1. \quad (2.48)$$

apsolutne vrednosti gornjih izraza jednake su jedinici, oba koeficijenta refleksije prema definiciji biće:

$$R_{\perp} = \frac{|\vec{E}_{\perp}^{od}|^2}{|\vec{E}_{\perp}^{up}|^2} = 1, \quad R_{\parallel} = \frac{|\vec{E}_{\parallel}^{od}|^2}{|\vec{E}_{\parallel}^{up}|^2} = 1. \quad (2.49)$$

Odavde se vidi da su pri totalnoj refleksiji oba koeficijenta refleksije jednaka jedinici, odnosno sva upadana energija odbija se sa odbijenom svetlošću.

Međutim, prelomljeni talas ipak postoji i on je određen izrazom:

$$\vec{E}^{pr} = \vec{E}_2 e^{-i(\omega_2 t - k_{2x} x - k_{2y} y - k_{2z} z)}. \quad (2.50)$$

S obzirom na to da je $k_{2x} = 0$, izraz dobija sledeći oblik:

$$\begin{aligned}\vec{E}^{pr} &= \vec{E}_2 e^{-i(\omega t - k_2 \sin \vartheta_2 y - k_2 \cos \vartheta_2 z)} = \vec{E}_2 e^{-i(\omega t - k_2 a y \mp i k_2 \sqrt{a^2 - 1} z)}, \\ \vec{E}^{pr} &= \vec{E}_2 e^{\pm k_2 \sqrt{a^2 - 1} z} e^{-i(\omega t - k_2 a y)}.\end{aligned}\quad (2.51)$$

Pošto je u drugoj sredini $z < 0$, a kada $|z| \rightarrow \infty$ jačina električnog polja ne sme težiti beskonačnosti, od dva navedena znaka u eksponentu mora se uzeti znak +, čime se prethodni izraz može napisati u sledećem obliku:

$$\vec{E}^{pr} = \vec{E}_2 e^{-k' |z|} e^{-i(\omega t - k_2 a y)}, \quad k' \equiv k_2 \sqrt{a^2 - 1}.\quad (2.52)$$

To znači da električno polje upadne svetlosti delimično prodire i u drugu sredinu, ali njegova jačina opada eksponencijalno sa dubinom i prostire se duž granične površi u upadnoj ravni.